Gleichungssysteme – Gleichungen in zwei Variablen

Gleichungen mit einer Variablen sind uns schon lange bekannt. Sie können allerdings auch zwei oder mehrere Variablen haben. Bei zwei Unbekannten in einer Gleichung gibt es keine eindeutigen Lösungen, was folgendes Beispiel zeigt:

$$2x+y=8$$

Durch Einsetzen bemerkt man rasch, dass es viele, nämlich unendliche viele, mögliche Lösungen gibt. Ein Zahlenpaar (x|y) ist genau dann eine Lösung, wenn aus der Gleichung eine wahre Aussage entsteht.

Zum Beispiel:

$x=2,\ y=4 \quad \rightarrow \quad 2\cdot 2+4=8$

$4+4=8$

$8=8$ w.A. → Das Zahlenpaar (2|4) ist Lösung der Gleichung $2x+y=8$.

$x=5,\ y=-2 \quad \rightarrow \quad 2\cdot 5+-2=8$

$10-2=8$

$8=8$ w.A. → Das Zahlenpaar (5|-2) ist Lösung der Gleichung $2x+y=8$.

Übung 1: Finde weitere sechs Zahlenpaare, die Lösung der Gleichung sind.

(|)	(|)	(|)	(|)	(|)	(|)

Übung 2: Gegeben ist die Gleichung $3x-5y=30$.

Finde sechs Zahlenpaare, die Lösung der Gleichung sind.

(|)	(|)	(|)	(|)	(|)	(|)

Drehen wir das Ganze um.

Gegeben ist jetzt ein Zahlenpaar und wir müssen passende Gleichungen dazu finden: (4|5)

Zum Beispiel:

$x+y=9 \quad \rightarrow \quad 4+5=9$

$9=9$ w.A. → Die Gleichung $x+y=9$ passt zum Zahlenpaar (4|5).

$2x-y=3 \quad \rightarrow \quad 2\cdot 4-5=3$

$8-5=3$

$3=3$ w.A. → Die Gleichung $2x-y=3$ passt zum Zahlenpaar (4|5).

Übung 3: Gegeben sind zwei Zahlenpaare a) (1|2) und b) (3|-1).

Gib jeweils zwei Gleichungen an, die zu den Wertepaaren passen.

Damit es eine eindeutige Lösung für Gleichungen in zwei Variablengibt, benötigen wir in der Regel zwei Gleichungen.

Das Beispiel zeigt diese Notwendigkeit in einem verständlichen Zusammenhang:

„Ein Kleinbauer besitzt Kaninchen (x) und Enten (y). Insgesamt sind es 42 Tiere“

Folgende Gleichung beschreibt diese Aussage:

$$x + y = 24$$

Aus dieser Aussage sind wieder viele verschiedene Möglichkeiten denkbar. Eine weitere Information ist nötig:

„Insgesamt haben alle Tiere 60 Beine“

Da Kaninchen vier Beine und Enten zwei Beine besitzen, ergibt sich eine weitere Gleichung:

$$4x + 2y = 60$$

Jetzt müssen wir ein Wertepaar finden, das beide Gleichung löst. Mittels Ausprobieren kommt man irgendwann bestimmt auf die korrekte Lösung, was uns auf Dauer zu aufwendig wird.

Aus diesem Grund gibt es ein Lösungsverfahren, das Additionsverfahren.

Für eine bessere Übersicht werden die Gleichungen schön untereinander geschrieben:

I: $x + y = 24 \;|\cdot(-2)$ → Wir versuchen die Gleichungen so zu multiplizieren, dass beim Addieren der Gleichungen eine Unbekannte wegfällt.

II: $\underline{4x + 2y = 60}$

$$\left.\begin{array}{l} -2x - 2y = -48 \\ \underline{4x + 2y = 60} \end{array}\right\rangle +$$

$2x + 0 = 12$ → Hiermit hätten wir eine Variable eliminiert, weshalb dieses Verfahren auch Eliminationsverfahren genannt wird.

$2x = 12$

$x = 6$ → Nun muss die entstandene Gleichung gelöst werden.

$x + y = 24$ → Um das y zu erhalten, muss x = 6 in eine der beiden Gleichung eingesetzt werden, wobei es keine Rolle spielt in welche.

$6 + y = 24$

$y = 18$ Der Kleinbauer besitzt also 6 Kaninchen und 18 Enten.

Übung 4: Löse die folgenden Gleichungssysteme in zwei Variablen mit dem Additionsverfahren.

a) I: $x + 2y = 24$ II: $\underline{x - 2y = -4}$	b) I: $x + 4y = 16$ II: $\underline{-x + y = 9}$	c) I: $-2x + y = 1{,}5$ II: $\underline{4x + 2y = 4}$	d) I: $2x - y = -1$ II: $\underline{4x + 2y = 20}$
e) I: $3x + 3y = -3$ II: $\underline{9x - 6y = -30}$	f) I: $-x + y = 1$ II: $\underline{2x + y = 4}$	g) I: $2x + 3y = 12$ II: $\underline{5x - 2y = 30}$	h) I: $3x - 4y = 22$ II: $5x + 2y = 15$

Lösungen: (10|7), (-4|5), (0,125|1,75), (2,25|5,5), (-2,4|1,4), (1|2), (6|0), (4|-2,5)