Gleichungssysteme – Lösungsmethoden

Lineare Gleichungen können in zwei Arten gegeben sein.

Implizite Form	Explizite Form
→ beide Variablen befinden sich auf einer Seite.	→ eine der beiden Variablen steht isoliert auf einer Seite (allein).
Beispiel: 2x – 3y = 6	Beispiel: y = 2x – 3; x = 6y

Gegeben ist eine lineare Gleichung in impliziter Form: $x+3y=9$

Wir erstellen nun die expliziten Darstellungen beider Unbekannten.

Explizite Darstellung von x:

$x+3y=9 \quad |-3y$

$x=9-3y$

Explizite Darstellung von y:

$x+3y=9 \quad |-x$

$3y=9-x \quad |:3$

$y=3-\frac{x}{3}$

Übung 1: Wandle die gegebenen impliziten Formen in die expliziten Formen von x und y um.

a) $2x-3y=6$

x =

y =

b) $5x+2y=-20$

x =

y =

c) $-2x-y=0$

x =

y =

Lösungsmethoden für Gleichungssysteme

Wir unterscheiden drei Arten von rechnerischen Lösungsverfahren für Gleichungssysteme:

(i) Gleichsetzungsverfahren (Komparationsmethode)

(ii) Einsetzungsverfahren (Substitutionsmethode)

(iii) Additionsverfahren (Eliminationsmethode)

Je nach Darstellungsform der linearen Gleichungen, wird eine der drei Formen gewählt.

(i) Gleichsetzungsverfahren (Komparationsmethode)

Diese Variante wird verwendet, wenn zwei explizite Gleichungen gegeben sind. Es sollte jedoch die gleiche Unbekannte explizit dargestellt sein.

Beispiel: $I: y=2x-5$; $II: y=-2x+3$

→ die rechten Seiten können nun gleichgesetzt werden, da jeweils y explizit dargestellt ist:

$2x-5=-2x+3 \quad |+2x \quad |+5$

$4x=8$

$x=2$

Für y muss man x = 2 in eine der beiden Gleichungen einsetzen:

in I: $y=2x-5$

$y=2\cdot 2-5$

$y=4-5$

$y=-1$

Das heißt: $x=2$ und $y=-1$ lösen beide Gleichungen.

→ **L = {(2|-1)}**

Probe:

Zur weiteren Überprüfung können wir in die andere Gleichung einsetzen: in II: $y=-2x+3$

(x|y) → (2|-1) → $-1=-2\cdot 2+3$

$-1=-4+3$

Lösung korrekt ✓ $-1=-1$ w. A.

Übung 2: Ermittle jeweils die Lösungsmenge mithilfe des Gleichsetzungsverfahrens (mit Probe).

a) $x=2y+5$; $x=-y+2$ b) $y=4x-1$; $y=0{,}5x+6$ c) $x-y=4$; $y=-2x+11$

Lösungen: L = {(3|-1)}; L = {(2|7)}; L = {(5|1)}

(ii) Einsetzungsverfahren (Substitutionsmethode)

Diese Variante wird verwendet, wenn eine explizite und eine implizite Form gegeben ist.

Beispiel: $I: 3x-4y=6$; $II: y=2x+1$

Die rechte Seite von Gleichung II kann nun statt y in die Gleichung I eingesetzt werden:

$3x-4\cdot(2x+1)=6$

$3x-8x-4=6$

$-5x-4=6 \quad |+4$

$-5x=10 \quad |:(-5)$

$x=-2$

Für y muss man x = -2 in eine der beiden Gleichungen einsetzen:

in II: $y=2x+1$

$y=2\cdot(-2)+1$

$y=-4+1$

$y=-3$

Das heißt: $x=-2$ und $y=-3$ lösen beide Gleichungen.

→ **L = {(-2|-3)}**

Probe:

Zur weiteren Überprüfung können wir in die andere Gleichung einsetzen: in I: $3x-4y=6$

(x|y) → (-2|-3) → $3\cdot(-2)-4\cdot(-3)=6$

$-6+12=6$

Lösung korrekt ✓ $6=6$ w. A.

Übung 3: Ermittle jeweils die Lösungsmenge mithilfe des Einsetzungsverfahrens (mit Probe).

a) $x+2y=10$; $y=x+2$ b) $5x-y=8$; $y=-2x-1$ c) $-x+4y=5$; $x=y+4$

Lösungen: L = {(2|4)}, L = {(1|-3)}, L = {(7|3)}

(iii) Additionsverfahren (Eliminationsmethode)

Diese Variante ist schon aus der letzten Schulübung bekannt. Verwendet wird sie, wenn zwei lineare Gleichungen in impliziter Form gegeben sind. Grundsätzlich ist die Eliminationsmethode die gängigste Form der Lösung von Gleichungssystemen. Deshalb ist sie für uns von zentraler Bedeutung.

Beispiel: $I: -3x + y = 7$; $II: x + 2y = -7$

Die beiden Gleichungen werden hierfür untereinander geschrieben.

$$\begin{array}{rcll} -3x + y & = & 7 & \\ \underline{x + 2y} & \underline{=} & \underline{-7} & | \cdot 3 \\ -3x + y & = & 7 & \\ \underline{3x + 6y} & \underline{=} & \underline{-21} & \Big\rangle + \\ 7y & = & -14 & | :7 \\ y & = & -2 & \end{array}$$

Für x muss y = -2 in eine der beiden Gleichungen einsetzen:

in II: $x + 2y = -7$

$x + 2 \cdot (-2) = -7$

$x - 4 = -7 \quad |+4$

$x = -3$

Das heißt: $x = -3$ und $y = -2$ lösen beide Gleichungen.

→ **L = {(-3|-2)}**

Probe:

Zur weiteren Überprüfung können wir in die andere Gleichung einsetzen: in I: $-3x + y = 7$

(x|y) → (-3|-2) → $-3 \cdot (-3) + (-2) = 7$

$9 - 2 = 7$

Lösung korrekt ✓ $7 = 7$ w. A.

Übung 4: Ermittle jeweils die Lösungsmenge mithilfe des Additionsverfahrens (mit Probe).

a) I: $-5x + y = 7$
II: $5x - 4y = 5$

b) I: $-3x + 2y = 1$
II: $x - 2y = 9$

c) I: $2x - y = 3$
II: $x + 3y = 5$

d) I: $3x - 6y = -9$
II: $4x - 2y = 9$

e) I: $2x + 3y = 8$
II: $3x + 7y = 2$

f) I: $8x - 7y = 2$
II: $3x - 2y = 7$

Lösungen: L = {(-2,2|-4)}, L = {(-5|-7)}, L = {(2|1)}, L = {(4|3,5)}, L = {(10|-4)}, L = {(9|10)}