WAHRSCHEINLICHKEITEN VON EREIGNISSEN	6a	Schuljahr 2019/20

<u>WIEDERHOLUNG:</u> Wahrscheinlichkeiten von Versuchsausgängen

Wir haben im letzten Kapitel Wahrscheinlichkeiten von Versuchsausgängen von Zufalls-experimenten, die mehrfach hintereinander ausgeführt werden (Mehrstufige Experimente), berechnet. Wir verwendeten zur Ermittlung solcher Wahrscheinlichkeiten die Additions- und Multiplikationsregel (1. und 2.Pfadregel) und fertigten Baumdiagrammen an.

Wiederholungsbeispiel 1:
Leo kauft drei Glückslose, mit denen er jeweils mit der Wahrscheinlichkeit 1/8 gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er **a.** mit allen drei Losen gewinnt, **b.** mit zwei Losen gewinnt? ***{ Lösungen: a. 1/512 b. 21/512 }***

Wiederholungsbeispiel 2:
Von 18 Schülern einer Klasse haben vier Schüler ihre Hausübung nicht gemacht, der Rest hat die Hausübung. Der Lehrer kontrolliert bei zwei zufällig ausgewählten Schülern, ob sie die Hausübung gemacht haben oder nicht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass **a.** beide Schüler die Hausübung nicht gemacht haben, **b.** mindestens einer der beiden Schüler die Hausübung gemacht hat? ***{ Lösungen: a. 2/51 b. 49/51 }***

Wiederholungsbeispiel 3:
Ein Multiple-Choice-Test besteht aus drei Fragen mit jeweils 6 Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine richtig ist. Ein Testteilnehmer kreuzt bei jeder Frage zufällig eine der Antwortmöglichkeiten an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit **a.** alle drei Fragen richtig zu beantworten, **b.** höchstens eine Frage richtig zu beantworten**?** ***{ Lösungen: a. 1/216 b. 25/27 }***

Wiederholungsbeispiel 4:
Herr A. spielt bei einem Automaten, bei dem man mit der Wahrscheinlichkeit 5/6 verliert, seine Frau bei einem Automaten mit einer Gewinnwahrscheinlichkeit von 1/15. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt mindestens einer der beiden? ***{ Lösung: 2/9 }***

WAHRSCHEINLICHKEIT von Ereignissen

Aufgabe 1:

Ein Kartenspiel („Schnapsen“) besteht aus 20 Karten (In den vier Farben Herz, Karo, Pik und Kreuz gibt es jeweils die fünf Figuren Zehner, Bube, Dame, König und As).
Eine Karte wird zufällig gezogen. Herr W. gewinnt, wenn ein König gezogen wird, Frau W. gewinnt, wenn eine Karte mit der Farbe Karo gezogen wird. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
A…Herr W. gewinnt **B**…Frau W. gewinnt **C**…Herr W. oder Frau W. gewinnt

Lösung:
P(A) = 4/20, weil es unter den 20 Karten 4 Könige gibt.
P(B) = 5/20, weil es unter den 20 Karten fünf mit der Farbe Karo gibt.
Wir kennen bereits die Additionsregel für Versuchsausgänge: P(AvB) = P(A) + P(B)
Hat diese Formel hier Gültigkeit? Wenn ja, dann gilt:
P(AvB) = P(A) + P(B) = 4/20 + 5/20 = 9/20

Herr W. gewinnt mit den vier Königen, Frau W. mit den fünf Karokarten.
ABER: Eine Karokarte ist der **Karo König**, der doppelt gezählt werden würde. Es gibt also nicht neun, sondern nur acht Gewinnkarten. Wir müssen die gemeinsame Karte (= Durchschnitt) abziehen. Wir haben somit eine **neue Formel**:

Additionsregel für Ereignisse: P(AvB) = P(A) + P(B) – P(A∩B)

Aufgabe 2:
Ein Würfel wird geworfen. Wir betrachten die beiden Ereignisse A…Es kommt eine Primzahl und B…Es kommt eine Zahl größer oder gleich 4. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit P(AvB).

Lösung:
P(A) = 3/6 und P(B) = 3/6   AvB tritt genau dann ein, wenn {2, 3, 4, 5, 6} eintritt, $A \cap B = \{5\}$
Also gilt: P(AvB) = P(A) + P(B) **– P(A∩B)** = 3/6 + 3/6 – 1/6 = 4/6 **= 5/6**

Aufgabe 3:
Ein Kartenspiel besteht aus 32 Karten (In den jeweils vier Farben Herz, Karo, Pik und Kreuz gibt es acht verschiedene Figuren Siebener, Achter, Neuner, Zehner, Bube, Dame, König und As).
Eine Karte wird zufällig gezogen. Herr W. gewinnt, wenn eine Dame gezogen wird, Frau W. gewinnt, wenn eine Karte mit der Farbe Herz gezogen wird. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Ereignisse:
A…Herr W. oder Frau W. gewinnt   **B**…Herr W. gewinnt und Frau W. gewinnt
C…Herr W. und Frau W. verlieren
{ Lösungen: P(A) =11/32 , P(B) = 1/32 , P(C) = 21/32 }

Aufgabe 4:
In einer Reisegruppe sprechen 80% Englisch, 38% sprechen Französisch und 22% können Englisch und Französisch sprechen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit spricht ein zufällig ausgewählter Teilnehmer der Reisegruppe Englisch oder Französisch?
{ Lösung: P(EvF) = P(E) + P(F) – P(E∩F) = 0,8 + 0,38 – 0,22 = 0,96 = 96% }

Aufgabe 5:
Frau M. wirft eine Münze fünfmal und erhält bei jedem Wurf „Zahl". Sie meint: „Beim sechsten Wurf muss jetzt „Kopf" kommen!". Hat sie mit ihrer Aussage Recht?

Lösung:
Stellen wir uns ein verkürztes Baumdiagramm des Zufallsexperiments vor:
Zahl → Zahl → Zahl → Zahl → Zahl → **Kopf**

*Die **(stochastische) Abhängigkeit** von zwei Ereignissen A und B richtet sich danach, ob das Eintreten eines Ereignisses A auf die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines zweiten Ereignisses B Einfluss nimmt oder nicht!*

Es sei B das Ereignis „Der fünfte Wurf zeigt „Zahl"" und A das Ereignis „Der 6. Wurf zeigt „Kopf"". Wir wollen die Wahrscheinlichkeit ermitteln, dass beim 6. Wurf „Kopf" kommt.

P(A/B)…Diese Wahrscheinlichkeit drückt die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von A unter der Voraussetzung, dass B bereits eingetreten ist, aus.
Eine derartige Wahrscheinlichkeit heißt **bedingte Wahrscheinlichkeit von A** unter der **Voraussetzung (**Man sagt auch **der Bedingung**) **von B**
Für unser Beispiel gilt: **P(A/B) = P(A) = ½,** weil die Wahrscheinlichkeit für „Kopf" beim sechsten Wurf unabhängig davon ist, was beim fünften Wurf eingetreten ist.

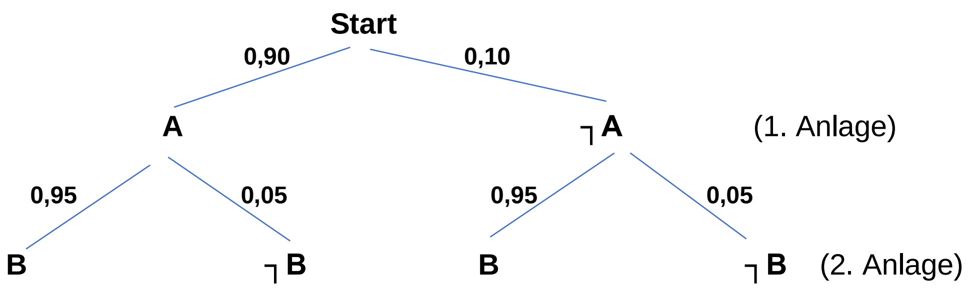
Sind A und B zwei Ereignisse, dann gilt:

Ein Ereignis **A ist stochastisch unabhängig** von einem Ereignis B, wenn gilt: P(A/B) = P(A)
Ein Ereignis **A ist stochastisch abhängig** von einem Ereignis B, wenn gilt: P(A/B) ≠ P(A)

BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT und MULTIPLIKATIONSREGEL für Ereignisse

Aufgabe 6:
Zwei Alarmanlagen werden in einem Einfamilienhaus eingebaut. Sie funktionieren unabhängig voneinander. Die erste Anlage gibt mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% Alarm, die zweite mit einer Wahrscheinlichkeit von 95%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass **a.** beide Anlagen Alarm geben**, b.** die zweite Anlage Alarm gibt, wenn die erste Anlage Alarm gegeben hat, **c.** die zweite Anlage Alarm gibt, wenn die erste Anlage keinen Alarm gegeben hat? *(Anmerkung: Fehlalarm wird hier nicht berücksichtigt!)*

Lösung: **Ereignis A…**Erste Anlage gibt Alarm**,** **Ereignis B…**Zweite Anlage gibt Alarm
Ereignis ┐A. .Erste Anlage gibt keinen Alarm **Ereignis ┐B**. .Zweite Anlage gibt keinen Alarm



Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten entnehmen wir dem Baumdiagramm:
a. P(A∧B) = P(A) · P(B) = 0,9 · 0,95 = 0,855 = **85,5%**
b. P(B/A) = P(B) = 0,95 = **95%**

Die bedingte Wahrscheinlichkeit **P(B /A)** heißt, dass B unter der Bedingung von A eintritt.

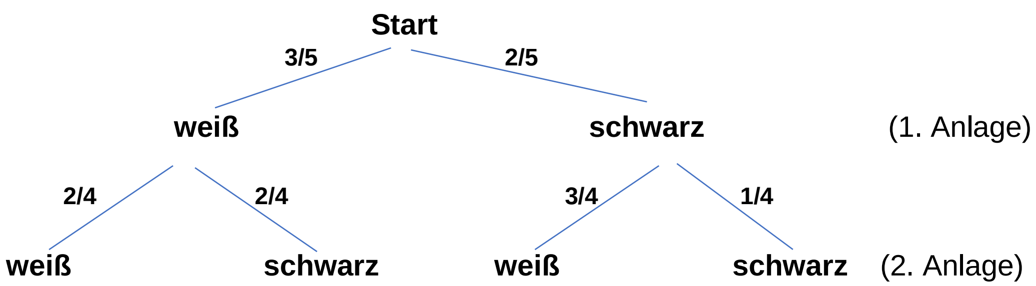
Dass die zweite Anlage Alarm gibt (B eintritt), ist unabhängig davon, ob die erste Anlage Alarm gibt (A ist eingetreten) oder nicht. Deshalb gilt: P(B/A) = P(B)

c. P(B/┐A) = P(B) = 0,95 = **95%**
Die bedingte Wahrscheinlichkeit **P(B/┐A)** heißt, dass B unter der Bedingung von ┐A eintritt.

Das Ereignis, dass die zweite Anlage Alarm gibt, ist stochastisch unabhängig vom Ereignis, dass die erste Anlage keinen Alarm gibt. Deshalb gilt: P(B/┐A) = P(B)

Aufgabe 7:
Aus einer Urne mit drei weißen und zwei schwarzen Kugel werden nacheinander zwei Kugeln gezogen, ohne die gezogene Kugel zurückzulegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste Kugel weiß und die zweite Kugel schwarz ist?

Lösung:



Es sei **A** das Ereignis, dass die erste Kugel weiß ist. **B** das Ereignis, dass die zweite Kugel schwarz ist. Gesucht ist demnach die Wahrscheinlichkeit P(A^B).

Wir überlegen uns das folgendermaßen:
Bei einer langen Versuchsserie wird in etwa 3/5 aller Fälle Ereignis A eintreten und in etwa der Hälfte dieser Fälle werden A und B eintreten, also in etwa 3/5 · ½ = 3/10 aller Fälle.

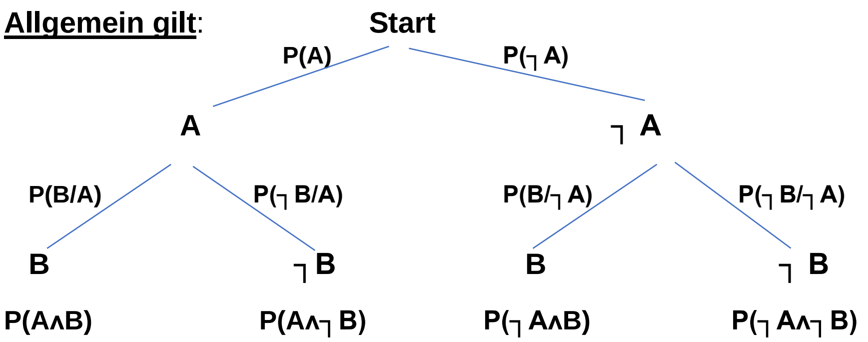
Es gilt demnach: $P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B/A) = 3/5 \cdot 2/4 =$ **6/20 = 0,3**
P(B/A) nennt man **bedingte Wahrscheinlichkeit** von B unter der Bedingung von A.

Aufgabe 8:
Ein Würfel wird geworfen. Man erhält die Augenzahl X. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse durch Überlegen:
a. P(X = 6 / X = gerade)   **b.** P(X = ungerade / X = 6)   **c.** P(X = gerade / X = 6)
{ Lösungen: a. 1/3 , b. 0 , c. 1 }

Aufgabe 9:
Für eine Wiederholung werden zwei Schüler einer Klasse mit 25 Schülern aufgerufen. Josef und Martin haben sich nicht vorbereitet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer dieser beiden als zweiter Schüler zur Wiederholung aufgerufen wird?
(Fertige ein Baumdiagramm an!)
{ Lösung: 2/24, weil gilt: P(Nein / Ja) = P(Ja ∧ Nein) / P(Ja) = (23/25 · 2/24) / 23/25 = 2/24 }

MULTIPLIKATIONSREGEL für Ereignisse: Es sei Ω ein Ereignisraum und P eine Wahrscheinlichkeitsfunktion auf Ω. Weiters seien die Ereignisse A und B Teilmengen von Ω. Dann ist die **bedingte Wahrscheinlichkeit P(B/A)** von B unter der Bedingung A gegeben durch **P(B/A) = P(A∧B)/P(A)**
Anmerkung: Diese Formel ergibt sich durch eine Umformung von **P(A∧B) = P(A) · P(B/A)**

<u>Allgemein gilt</u>:



Betrachten wir den linken Ast des Baumdiagramms, dann erkennen wir die vorhin angeführte Multiplikationsregel: **P(A∧B) = P(A) · P(B/A)**

Aufgabe 10:
Eine bestimmte Pollenart löst bei einem Allergiker mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 80% einen Schnupfen und bei etwa 8,5% einen Schnupfen mit anschließenden Kopfschmerzen aus. Ein Allergiker bemerkt, dass er beim Spaziergang auf Grund der Pollen einen Schnupfen hat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden Kopfschmerzen folgen?

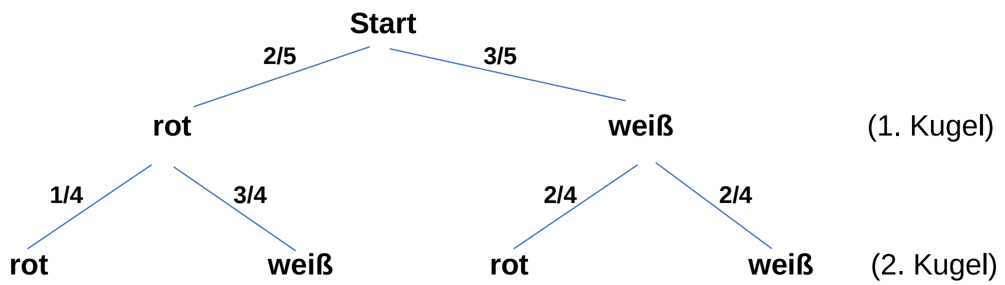
Lösung:
Ereignis A…Schnupfen   Ereignis B…Kopfschmerzen

Wir haben im Text die Wahrscheinlichkeiten P(A) = 0,8 sowie P(A∧B) = 0,085 gegeben und suchen nach der Wahrscheinlichkeit P(B/A).
Nach der Multiplikationsregel gilt: P(A∧B) = P(A) · P(B/A)
Wir formen die Gleichung um und erhalten: P(B/A) = P(A^B) / P(A) = 0,085 / 0,8 = **10,63%**

Aufgabe 11:
Bei einem Algebratest werden zwei Fehler A und B untersucht. Von den untersuchten Personen machen 35% den Fehler A und 7% beide Fehler. Wenn eine Person den Fehler A macht, mit welcher Wahrscheinlichkeit macht dieselbe Person auch den Fehler B?
{ $P(B/A) = 20\%$ }

Aufgabe 12:
In einer Stadt schneit es an einem Dezembertag mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% und an zwei aufeinanderfolgenden Dezembertagen mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,28%. Angenommen, es schnei an einem Dezembertag. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt auch am darauffolgenden Tag Schnee? **{ $P(B/A) = 70\%$ }**

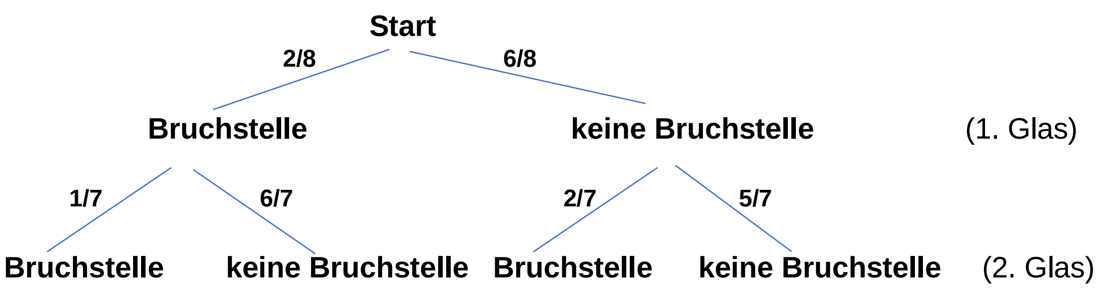
Aufgabe 13:
In einer Urne befinden sich zwei rote und drei weiße Kugeln. Herr A. zieht zwei Kugeln blind aus der Urne, ohne die gezogene Kugel zurückzulegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind **a.** beide Kugeln rot, **b.** ist die zweite Kugel rot, wenn die erste Kugel auch rot war und **c.** ist die zweite Kugel rot, wenn die erste Kugel weiß war?
Lösung:



Die gesuchten Wahrscheinlichkeiten entnehmen wir dem Baumdiagramm:
a. $P(A \wedge B) = P(A) \cdot P(B/A) = 2/5 \cdot 1/4 = 2/20 = 0{,}1 =$ **10%**
b. $P(B/A) = P(A \wedge B) / P(A) = (2/5 \cdot 1/4) / 2/5 = 1/4 = 0{,}25 =$ **25%**
c. $P(B/A) = P(A \wedge B) / P(A) = (3/5 \cdot 2/4) / 3/5 = 2/4 = 0{,}5 =$ **50%**
Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die zweite gezogene Kugel rot ist, hängt also davon ab, ob die erste gezogene Kugel rot oder weiß war. (Einmal 25%, dann 50%)

Aufgabe 14:
In einem Karton befinden sich acht Gläser, von denen zwei eine Bruchstelle aufweisen. Es werden zwei Gläser zur Kontrolle entnommen, ohne die bereits untersuchten Gläser zurückzulegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass **a.** das zweite entnommene Glas keine Bruchstelle aufweist, obwohl das erste Glas eine Bruchstelle aufgewiesen hat, **b.** das zweite entnommene Glas keine Bruchstelle aufweist und das erste Glas auch keine Bruchstelle aufgewiesen hat?

Lösung:



a. $P(\neg B/A) = P(A \wedge \neg B) / P(A) = (2/8 \cdot 6/7) / 2/8 = 6/7 = 0{,}8571 =$ **85,71%**
b. $P(\neg B/\neg A) = P(\neg A \wedge \neg B) / P(\neg A) = (6/8 \cdot 5/7) / 6/8 = 5/7 = 0{,}7143 =$ **71,43%**

Aufgabe 15:
Zwei Zufallsereignisse A und B folgen aufeinander. Gegeben sind P(A) = 0,35, P(B/A) = 0,78 und P(┐ A/┐ B) = 0,46. Stellen Sie den gegebenen Sachverhalt durch das Erstellen eines Baumdiagrammes dar und tragen sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten ein.

Aufgabe 16:
In einer Fabrik werden in zwei verschiedenen Abteilungen A und B 380 Produkte erzeugt. 240 Stücke werden in Abteilung A erzeugt. Im Rahmen einer Qualitätskontrolle weisen fünf Produktionsstücke von Abteilung B Fehler auf. Insgesamt sind es 20 fehlerhafte Stücke.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei zufälliger Wahl eines Produktes, dass es
a. in Abteilung A produziert wurde und fehlerhaft ist?
b. fehlerhaft ist, aber von Abteilung B produziert wurde?
c. ohne Fehler ist, aber in der Abteilung A gefertigt wurde?

Lösung:
Wir geben eine **Vierfeldertafel mit (1) absoluten Zahlen** und mit **(2) relativen Anteilen** an:

(1) Absolute Zahlen

	Fehlerhaft F	**Ohne Fehler OF**	
Abteilung A	**15**	**225**	240
Abteilung B	5	**135**	**140**
	20	**360**	380

(2) Relative Anteile

	Fehlerhaft F	**Ohne Fehler OF**	
Abteilung A	**15/380 = 0,0395**	**225**/380 = **0,5921**	240/380 = 0,6316
Abteilung B	5 /380 = 0,0132	**135**/380 = **0,3553**	**140**/380 = **0,3684**
	20	**360**	380/380 = 1

a. P(A∧F) = 15/380 = 0,0395 = **3,95%**
b. Wir suchen nach der Wahrscheinlichkeit P(F/B).
Nach der Multiplikationsregel gilt: P(B∧F) = P(B) · P(F/B)
Wir formen diese Gleichung um und erhalten:
P(F/B) = P(B∧F) / P(B) = 0,0132 / 0,3684 = 0,0358 = **3,58%**
c. P(OF/A) = P(A∧OF) / P(A) = 0,5921 / 0,6316 = 0,9375 = **93,75%**

Aufgabe 17:
Von 260 Schülern der Oberstufe einer Schule (170 weiblich) hatten am Schuljahresende 45 einen ausgezeichneten Schulerfolg. Unter den ausgezeichneten Schülern befanden sich 12 Burschen. Ein Oberstufenschüler wird zufällig ausgewählt. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:
a. Der unter allen Mädchen gewählte Schüler hat einen ausgezeichneten Schulerfolg.
b. Der gewählte Schüler ist männlich und hat keinen ausgezeichneten Schulerfolg.
c. Der gewählte Schüler ist weiblich unter der Annahme, dass sie einen ausgezeichneten Schulerfolg hat.

Lösung:
Wir fertigen zunächst eine sogenannten VIERFELDERTAFEL mit relativen Anteilen an:

	Auszeichnung (AE)	**Keine Auszeichnung (┐ AE)**	
Weiblich (W)	33/260 = P(W∧AE)	137/260 = P(W∧┐ AE)	**170/260**
Männlich (M)	**12/260** = P(M∧AE)	78/260 = P(M∧┐ AE)	90/260
	45/260	215/260	**260/260 = 1**

a. P(AE/W) = P(W∧AE)/P(W) = 33/260 / 170/260 = 33/260 · 260/170 = 33/170 = **19,41%**
b. P(M∧┐ AE) = 78/260 = **30%**
c. P(W/AE) = P(AE∧W) / P(AE) = 33/260 / 45/260 = 33/260 · 260/45 = 33/45 = **73,33%**

Aufgabe 18:

1. Eine Firma hat 300 Mitarbeiter. Eine Befragung, wie diese zur Arbeit kommen, ergab folgende Tabelle:

	mit Auto	mit öffentlichen Verkehrsmitteln	Gesamt
weiblich	48		
männlich		63	141
gesamt	126		

Ergänzen Sie die Tabelle! Ein Mitarbeiter dieser Firma wird zufällig ausgewählt.

a. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn der Ausgewählte ein Mann ist, er mit dem Auto zur Arbeit fährt?

b. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn die Ausgewählte eine Frau ist, sie mit dem Auto zur Arbeit fährt?

c. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mitarbeiter, der mit dem Auto zur Arbeit fährt, ein Mann ist?

d. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mitarbeiter mit dem Auto zur Arbeit fährt und männlich ist?

{ P(A/M) = 78/141 = 55,32% ; P(A/W) = 48/159 = 30,19% ; P(M/A) = 78/126 = 61,9% ; P(A∩M) = 78/300 = 26% }

Aufgabe 19:
Von allen Schülerinnen und Schülern der 2.Klassen einer AHS wählen für die 3. Klasse 43% den Zweig mit Französisch (F-Zweig), 21% das herkömmliche Gymnasium mit Latein (L-Zweig) und der Rest geht ins Realgymnasium (R-Zweig). Der Mädchenanteil beträgt im F-Zweig 63% und im L-Zweig 48%. Im R-Zweig gibt es 71% Burschen.
a. Wie hoch ist der Mädchenanteil an allen Kindern in den 2. Klassen?
b. Ein Mädchen wird aus allen Kindern der 2. Klassen ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie den F-Zweig gewählt hat?
{ a. 0,4761 = 47,61% , b. 56,9% }

Aufgabe20:
Ein Autohersteller lässt bei einem neuen Wagentyp Scheibenwischer von drei verschiedenen Zulieferfirmen einbauen. Vom ersten Zulieferer stammen 20%, vom zweiten 30% und vom dritten 50%. Bei den Inspektionen nach 6 Monaten wird festgestellt, dass 15% der Scheibenwischer der ersten Zulieferfirma, 18% der zweiten und 9% der dritten Firma unbrauchbar sind.
a. Stellen Sie die Daten in einem Baumdiagramm dar. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Scheibenwischer unbrauchbar ist.
b. Berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten dafür, dass ein zufällig ausgewählter Scheibenwischer, der sich als unbrauchbar erwiesen hat, aus der ersten, zweiten bzw. dritten Firma stammt.
{ a. 12,9% , b. P(F/Z_1) = 23,26% , P(F/Z_2) = 41,86% , P(F/Z_3) = 34,88% }