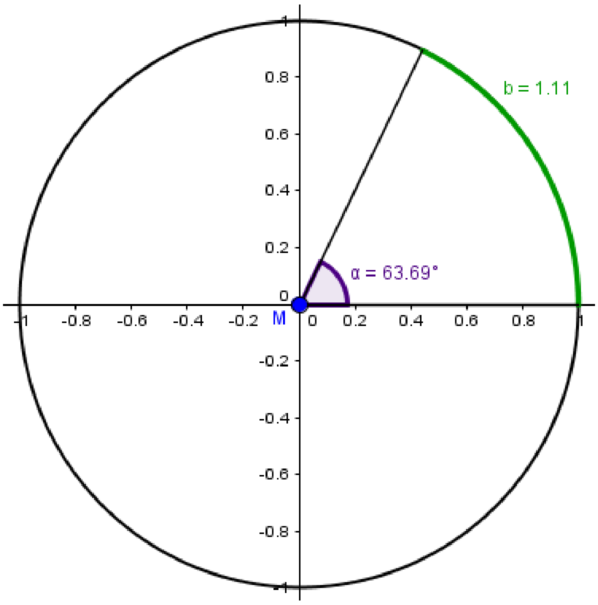
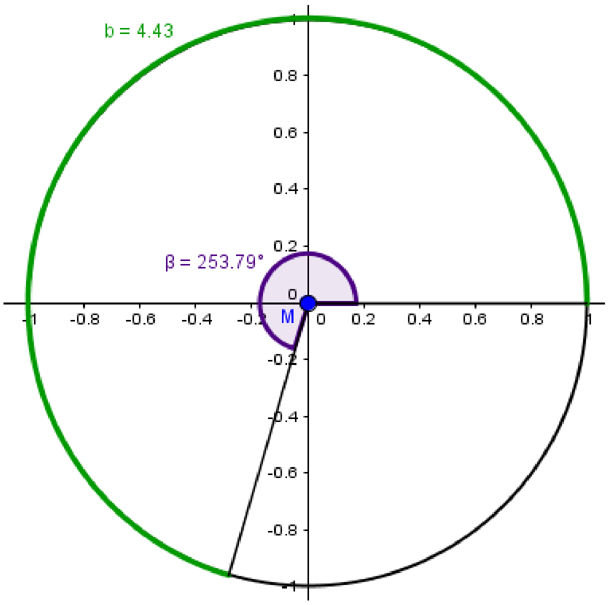
Gradmaß – Bogenmaß

Das Bogenmaß ist eine Möglichkeit das Gradmaß eines Winkels mit einer reellen Zahl auszudrücken. Das hilft uns später bei der graphischen Darstellung der trigonometrischen Funktionen.





Einem Winkel α kann im Einheitskreis immer eindeutig eine Bogenlänge b zugeordnet werden. In der linken Graphik sieht man, dass dem Winkel α = 63,69° die Bogenlänge b = 1,11 zugeordnet wird. In der rechten Darstellung gehört zum Winkel β = 253,79° die Bogenlänge b = 4,43.

Der Umfang u eines Kreis wird mit der bekannten Formel $u=2\cdot r\cdot\pi$ berechnet. Nachdem wir uns im Einheitskreis befinden gilt: $r=1$. Daraus folgt: $u=2\cdot\pi$.

Dem Vollkreis mit 360° bestricht also $2\pi \rightarrow 360° = 2\pi\ rad$

Die Abkürzung rad steht für Radiant und wird einem Winkel, der im Bogenmaß angeschrieben ist, angehängt.

Stellen wir den Zusammenhang dar:

$$1\,rad=\frac{360°}{2\pi}=\frac{180°}{\pi}\approx 57{,}3° \qquad 1°=\frac{2\pi}{360°}=\frac{\pi}{180°}\approx 0{,}017\ rad$$

$$2\,rad=\frac{2\cdot 360°}{2\pi}=\frac{2\cdot 180°}{\pi}\approx 114{,}6° \qquad 2°=\frac{2\cdot 2\pi}{360°}=\frac{2\cdot\pi}{180°}\approx 0{,}035\ rad$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$b\,rad=\frac{b\cdot 360°}{2\pi}=\frac{b\cdot 180°}{\pi}=\alpha \qquad \alpha°=\frac{\alpha\cdot 2\pi}{360°}=\frac{\alpha\cdot\pi}{180°}=b$$

Daraus ergeben sich folgende Formeln: $\boxed{\boxed{\alpha=\frac{b\cdot 180°}{\pi}} \leftrightarrow \alpha\pi=b\cdot 180° \leftrightarrow \boxed{\frac{\alpha\cdot\pi}{180°}=b}}$

Somit können wir von Gradmaß ins Bogenmaß umrechnen und umgekehrt.

Beispiel: Wandle in die jeweils andere Einheit um: a) $\alpha = 122°$ b) $b = 3{,}5$ rad

zu a) $b = \frac{\alpha \cdot \pi}{180°}$ zu b) $\alpha = \frac{b \cdot 180°}{\pi}$

$b = \frac{122° \cdot \pi}{180°}$ $\alpha = \frac{3{,}5 \cdot 180°}{\pi}$

$b \approx 2{,}13\ rad$ $\alpha \approx 200{,}5°$

Übung 1: Wandle in das Bogenmaß um.

a) $\alpha = 71°$	b) $\beta = 111°$	c) $\gamma = 180°$	d) $\delta = 250°$	e) $\varepsilon = 345°$

`Lösungen: 1,24 rad; 1,94 rad; π rad; 4,36 rad; 6,02 rad`

Übung 2: Wandle in Gradmaß um.

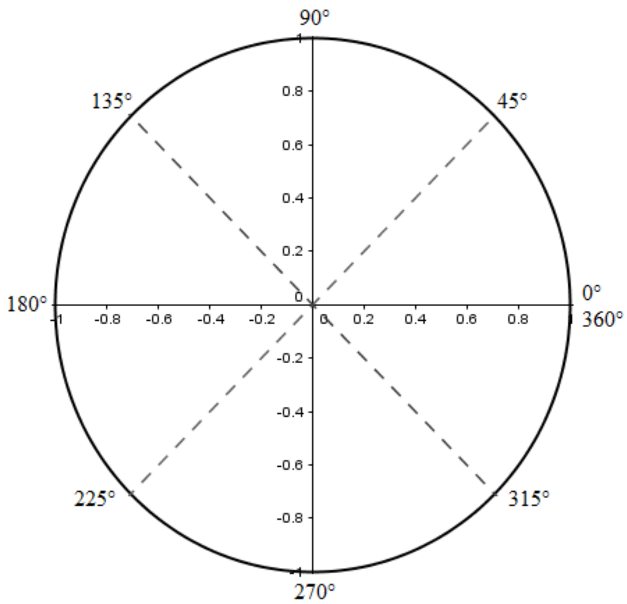
a) $b_1 = 0{,}7$	b) $b_2 = \pi/2$	c) $b_3 = 4$	d) $b_4 = 4{,}61$	e) $b_5 = 6$

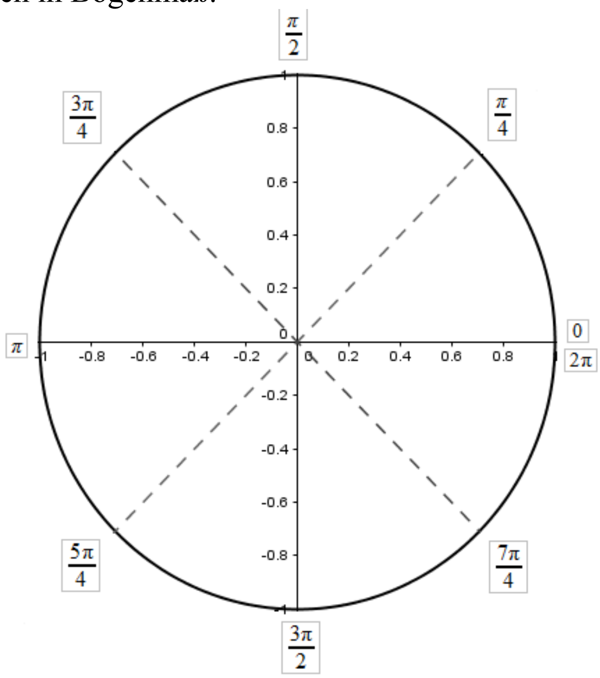
`Lösungen: 40°; 90°; 229°; 264°; 344°`

Wichtig sind für uns vor allem die Bogenmaße für die Achsen und Halbachsen.

Folgende Graphik zeigt die Zuordnung der Winkel in Grad zur dementsprechenden Bogenlänge.

Nachdem der Vollkreis ein Bogenmaß von 2π besitzt, ergeben sich durch die Bruchteile von 2π die anderen Winkel der Achsen bzw. Halbachsen in Bogenmaß.





Übung 3: Versucht euch die Zuordnung zu merken und erstellt dazu eine Tabelle

Gradmaß	0°	45°	90°	135°	180°	225°	270°	315°	360°
Bogenmaß									

Anmerkung: Gib das Bogenmaß in Bruchteilen von π, wie in der oberen Graphik an.

Winkelfunktionen mit Bogenmaß

Gleich wie beim Gradmaß, kann auch für eine Bogenlänge der Sinus, Cosinus oder Tangens zugeordnet werden. Dazu benötigt es allerdings eine Einstellung am Taschenrechner.

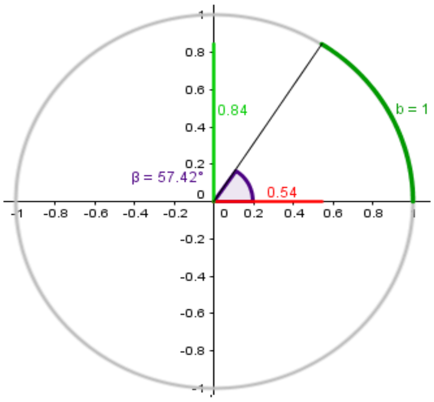
Drückt die Taste DRG auf dem Taschenrechner.
Es kommen drei Optionen: DEG, RAD und GRD
DEG steht für den 360°-Kreis, RAD für Radiant, also für das Bogenmaß und GRD steht für einen 400°-Kreis. Bis jetzt hab ihr immer nur mit DEG gerechnet. Nun stellt den Rechner auf RAD.
Bei manchen Geräten werden beim Drücken der DRG-Taste nur die Buchstaben D, R und G abgewechselt. Wählt für das Bogenmaß den Buchstaben R.

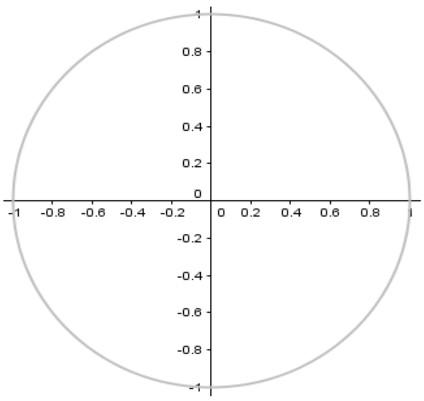
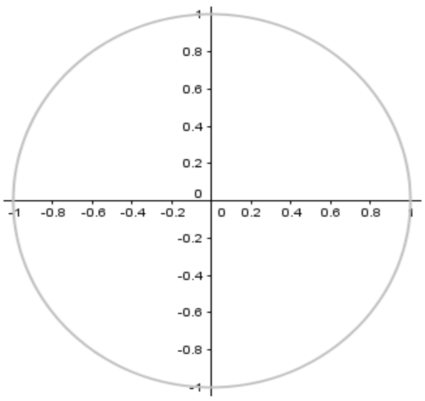
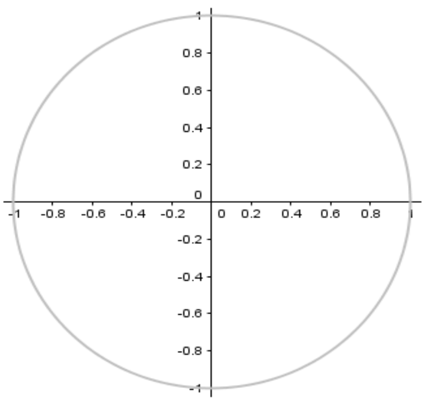
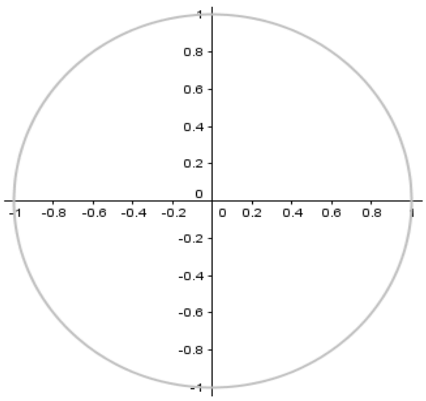
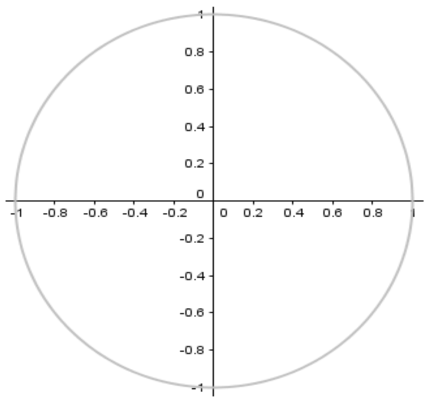
Beispiel: Der Winkel $\alpha = 120°$ steht für eine Bogenlänge von $b = 2{,}09$.

→ $\sin(120°) = 0{,}87$ (mit DEG) → $\sin(2{,}09) = 0{,}87$ (mit RAD)

Übung 4: Gib den Sinus, Cosinus bzw. Tangens für die gegebenen Winkel in Bogenmaß an. Berechne auch den Winkel in Grad und überprüfe deine Ergebnisse. Stelle den Winkel α, den Kreisbogen b sowie deren Sinus- und Cosinuswerte graphisch dar, wie im Beispiel.

	sin	cos	tan	α in Grad
$b_1 = 1$	0,84	0,54	1,56	57,3°
$b_2 = 2$				
$b_3 = 3$				
$b_4 = 4$				
$b_5 = 5$				
$b_6 = 6$				



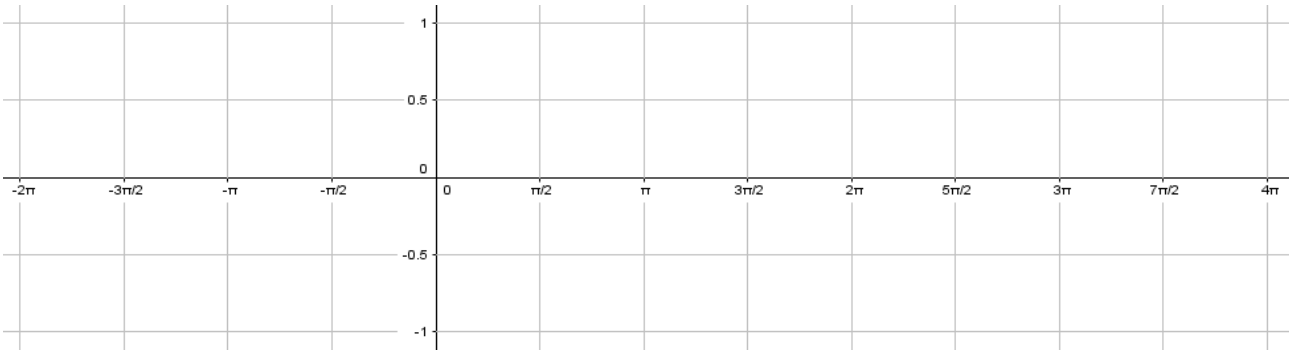






Trigonometrische Funktionen

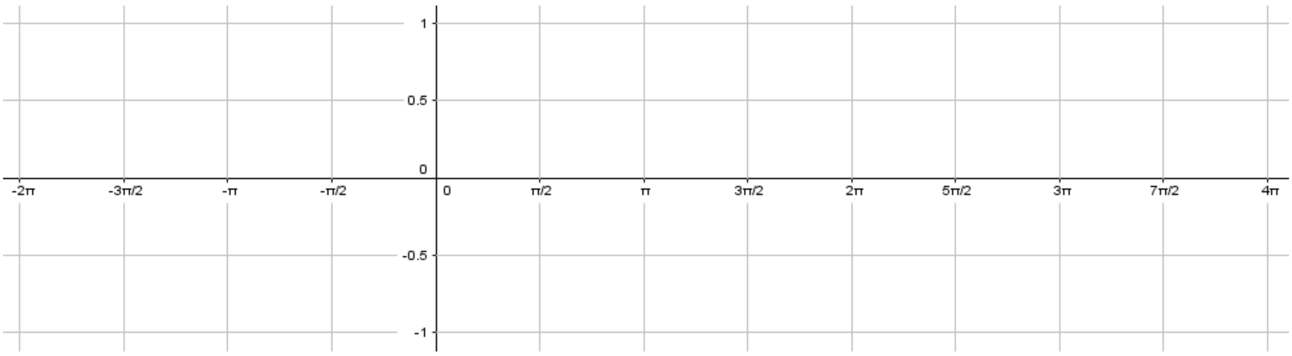
Die uns bereits bekannten Winkelfunktionen können auch als Funktionen graphisch dargestellt werden. Die x-Achse wird mit den Argumenten des Bogenmaßes, also 0, π/2, π, 3π/2, 2π beschriftet. Der y-Wert ist der jeweilige Funktionswert der Winkelfunktion Sinus, Cosinus oder Tangens.

Übung 5: In Verbindung mit dem Lehrvideo.

1) Sinusfunktion



2) Cosinusfunktion



3) Tangensfunktion