

Die EXPONENTIALFUNKTION $f: y = c \cdot a^x$ Eigenschaften und Anwendungen

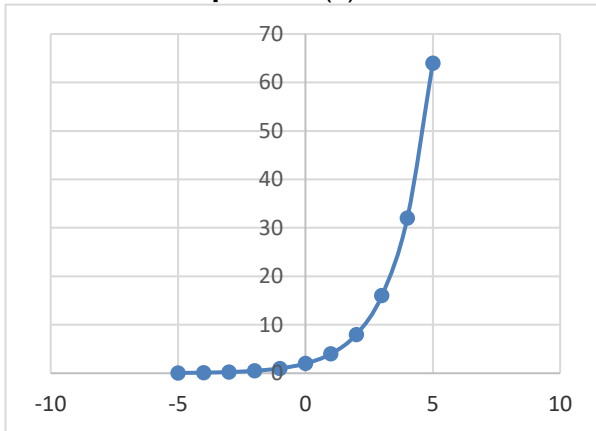
Eine Funktion f der Bauart $f: y = c \cdot a^x$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $c \in \mathbb{R}^+$) heisst **Exponentialfunktion**.

Der Graf einer Exponentialfunktion ist streng monoton steigend für $G = \mathbb{R}$, wenn gilt: $a > 1$

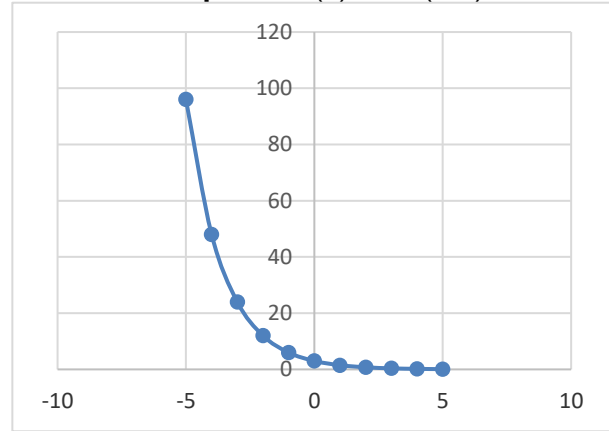
Der Graf einer Exponentialfunktion ist streng monoton fallend wenn gilt: $0 < a < 1$

Die x-Achse ist eine Asymptote der Funktion, der Punkt $P(0/c)$ liegt am Funktionsgrafen.

Beispiel 1: $f(x) = 2 \cdot 2^x$



Beispiel 2: $f(x) = 3 \cdot (1/2)^x$



Es gilt: Wird das Argument um 1 erhöht ($x \rightarrow x+1$), so **erhöht** sich der Funktionswert um das **a-fache** ($f(x+1) = f(x) \cdot a$); wird das Argument um k erhöht ($x \rightarrow x+k$), dann **erhöht** sich der Funktionswert um das **a^k -fache** ($f(x+k) = f(x) \cdot a^k$).

D.h. Bei einer Erhöhung des Arguments erhöht sich der Funktionswert um einen **konstanten Änderungsfaktor!**

Beweis: $f(x) = c \cdot a^x \rightarrow f(x+1) = c \cdot a^{x+1} = c \cdot a^x \cdot a = f(x) \cdot a$

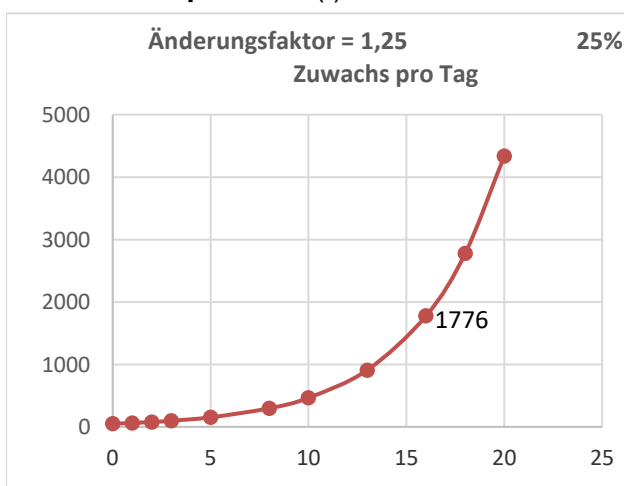
$$f(x) = c \cdot a^x \rightarrow f(x+k) = c \cdot a^{x+k} = c \cdot a^x \cdot a^k = f(x) \cdot a^k$$

In den letzten Tagen hat man im Zusammenhang mit der Coronakrise des öfteren gehört oder gelesen, dass der Änderungsfaktor zwischen 1,10 und 1,25 liegt.

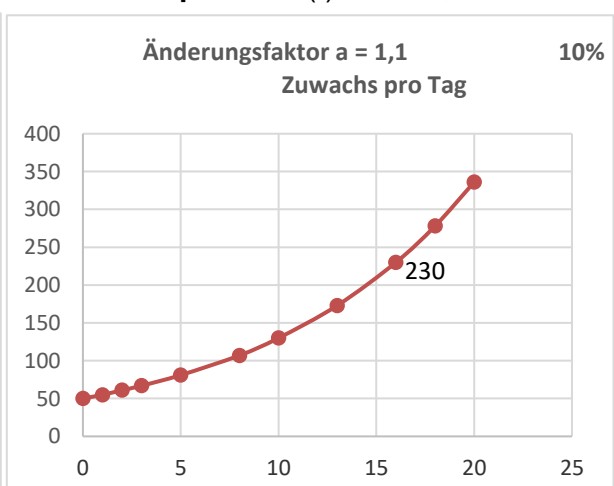
Was bedeutet das und welche Auswirkungen hätte das Abfallen des Faktors 1,25 auf den Faktor 1,10 auf die Anzahl eventueller Krankheitsfälle?

Wir gehen in den Beispielen A und B von einem Startwert von 50 Krankheitsfällen aus und betrachten uns die Anzahl der Erkrankten $N(t)$ in einer Zeitspanne von 20 Tagen.

Beispiel B: $N(t) = 50 \cdot 1,25^t$



Beispiel A: $N(t) = 50 \cdot 1,10^t$



Die massive Auswirkung des höheren Wertes für a auf die Anzahl der Krankheitsfälle nach einer bestimmten Anzahl an Tagen ist grafisch klar ersichtlich.

Beispielsweise hätte man bei einem Änderungsfaktor von $a = 1,10$ (= **10 % Zuwachsrate**) nach 16 Tagen ausgehend von 50 Krankheitsfällen **230 Krankheitsfälle**, bei einem Änderungsfaktor von $a = 1,25$ (= **25% Zuwachsrate**) ungläubliche **1 776 Krankheitsfälle**, also eine **Differenz von 1 546** Krankheitsfällen.

Beispiel 1

Gegeben ist die Gleichung einer Exponentialfunktion f mit $f(t) = 80 \cdot 1,12^t$ (t in Tagen)

- Interpretieren Sie die beiden Werte 80 und 1,12.
- Bestimmen Sie die Funktionswerte f(t) an den Stellen $t = 1$ und $t = 6$.
- Bestimmen Sie die Argumente t für Funktionswerte $f(t) = 165$ und $f(t) = 305$.
- An welcher Stelle t lautet der Funktionswert $f(t) = 437,885$?
- An welcher Stelle t lautet der Funktionswert $f(t) = 40,5305$?

Lösungen: a. **80** ... Anfangswert, **1,12** ...Zuwachs von 12% pro Tag

b. $f(1) = 89,6$, $f(6) = 157,9$ c. $t \approx 6,39$, $t \approx 11,81$ d. $t = 15$ e. $t = -6$

Im Zusammenhang mit exponentiellen Modellen ist sehr oft von der **Verdoppelungszeit** (bei Wachstumsprozessen) oder von der **Halbwertszeit** (bei Zerfallsprozessen) die Rede. Die Verdoppelungszeit beschreibt die Zeitdauer, bis sich ein **Anfangswert verdoppelt** hat, die Halbwertszeit ist jene Zeit, bis ein **Anfangswert sich halbiert** hat.

Gehen wir zu unserem Beispiel von vorhin zurück, wo wir den Verlauf der Krankheitsfälle ausgehend von 50 Erkrankungen im Hinblick auf die beiden Änderungsfaktoren $a = 1,10$ beziehungsweise $a = 1,25$ betrachtet haben. Welche **Verdoppelungszeiten** hätten wir bei diesen beiden Modellen?

	verschiedene Anfangswerte	
Modell A: $N(t) = 50 \cdot 1,10^t$	Modell B: $N(t) = 50 \cdot 1,25^t$	$N(t) = 80 \cdot 1,25^t$
$100 = 50 \cdot 1,10^t$	$100 = 50 \cdot 1,25^t$	$160 = 80 \cdot 1,25^t$
$2 = 1,10^t \quad \log$	$2 = 1,25^t \quad \log$	$2 = 1,25^t \quad \log$
$t = \log(2) / \log(1,10)$	$t = \log(2) / \log(1,25)$	$t = \log(2) / \log(1,25)$
$t \approx 7,3$ Tage	$t \approx 3,1$ Tage	$t \approx 3,1$ Tage
	gleiche Verdoppelungszeit	

Die Ergebnisse zeigen, dass es im Falle eines täglichen Zuwachses von 25% 3,1 Tage dauert, bis sich die Anzahl der bereits Erkrankten verdoppelt hat, wogegen es im Falle einer täglichen Zuwachsrate von 10% innerhalb von 7,3 Tagen zu einer Verdoppelung der Anzahl der Erkrankten kommt.

Das bedeutet: Der **Startwert hat keinen Einfluss** auf die **Verdoppelungszeit**.

Der **Änderungsfaktor** und damit auch der **prozentuelle Zuwachs/Einheit** sind für die **Verdoppelung** eines Anfangswertes ganz **entscheidend!**

In der letzten Woche hörte man im Rahmen der Ausbreitung des Coronavirus, dass die Verdoppelungszeit ca. 2,5 Tage betrage, am Wochenende erhöhte sich dieser Wert auf 3,2 Tage. Gestern hörte man, die Verdoppelungszeit sei auf 4,8 Tage gestiegen.

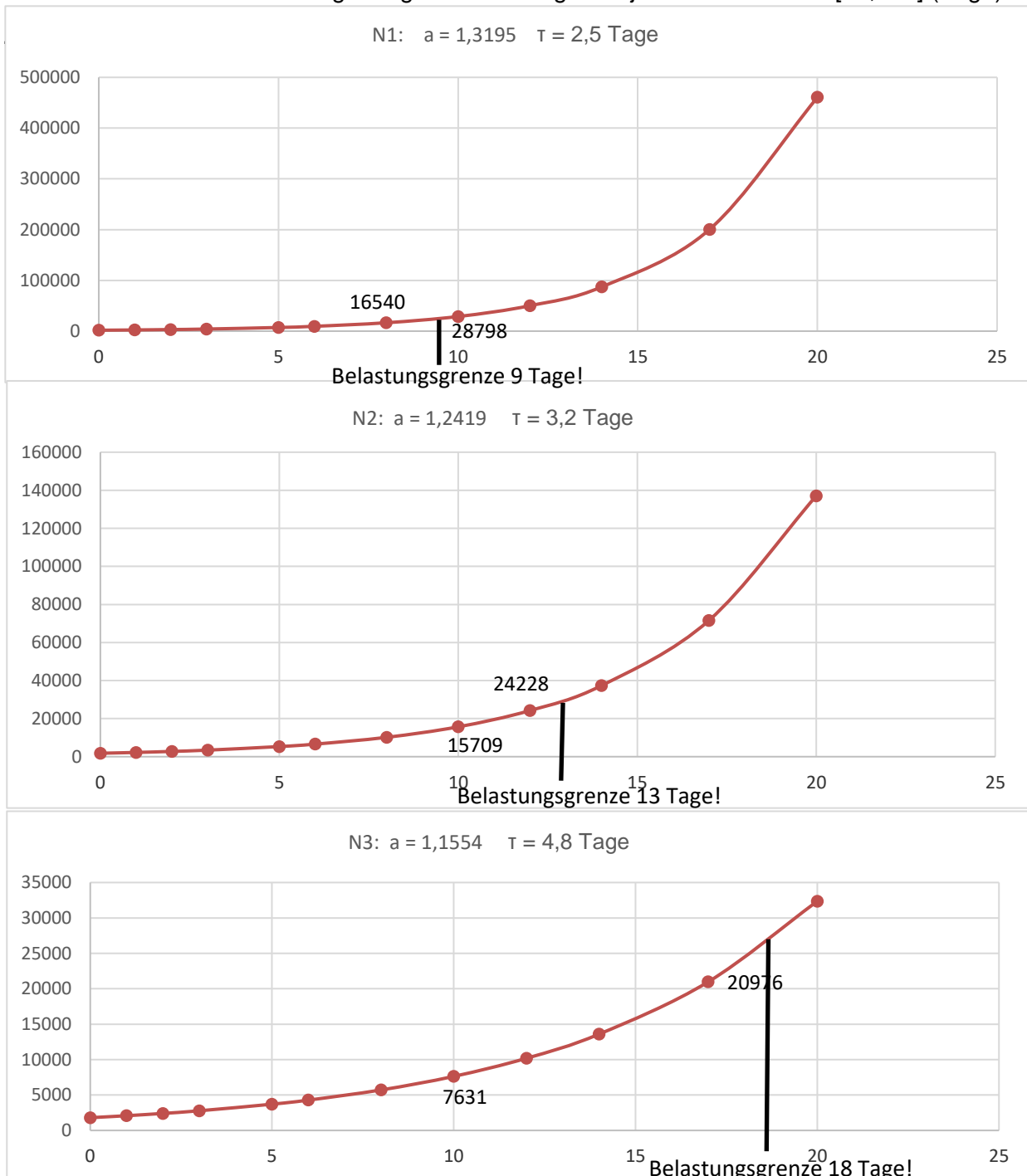
Modelliere den Zusammenhang dieser Aussagen bei 1800 Erkrankungen als Anfangswert:

$$a^x = 2 \rightarrow a^{2,5} = 2 \rightarrow a = \sqrt[2,5]{2} \rightarrow a \approx 1,3195 \quad N_1(t) = 1800 \cdot 1,3195^t$$

$$a^x = 2 \rightarrow a^{3,2} = 2 \rightarrow a = \sqrt[3,2]{2} \rightarrow a \approx 1,2419 \quad N_2(t) = 1800 \cdot 1,2419^t$$

$$a^x = 2 \rightarrow a^{4,8} = 2 \rightarrow a = \sqrt[4,8]{2} \rightarrow a \approx 1,1554 \quad N_3(t) = 1800 \cdot 1,1554^t$$

Betrachten wir nun die drei zugehörigen Funktionsgraphen jeweils im Intervall [0 ; 20] (Tage)



Welchen Unterschied bemerken wir beispielsweise nach 10 Tagen?

Antwort: Nach 10 Tagen gibt es nach Modell N_1 schon fast 29 000 Erkrankte, nach Modell N_2 16 000 Erkrankte und nach Modell N_3 ist die Anzahl der Erkrankten unter 8 000.

Die **Belastungsgrenze von etwa 25 000 Erkrankungen** wäre in Modell N_1 bereits nach **9 Tagen** erreicht, in Modell N_2 nach **13 Tagen** und in Modell N_3 erst nach **18 Tagen**. Das Verlängern der Zeit bis zum Erreichen der Belastungsgrenze ist für die Aufrechterhaltung des Gesundheitssystems eines Staates ganz essentiell. Das erklärt auch das derzeit vorrangige Ziel der Politik, die Pandemie so lange wie möglich aufzuhalten.

In der letzten Woche wurde der Änderungsfaktor (tägliche Wachstumsrate!) ausgewertet und es ergab sich folgende Datenliste: 1,18 , 1,15 , 1,14 , 1,2 , 1,19 , 1,13 , 1,2
Welchen Wert hatte in dieser Woche die durchschnittliche tägliche Änderungsrate?

Falscher Lösungsweg: $x = (1,18 + 1,15 + 1,14 + 1,2 + 1,19 + 1,13 + 1,2) / 7 = 1,17$

Richtiger Lösungsweg: $1,18 \cdot 1,15 \cdot 1,14 \cdot 1,2 \cdot 1,19 \cdot 1,13 \cdot 1,2 = x^7$
 $x^7 = 2,99552257 \rightarrow x = \sqrt[7]{2,99552257} \approx 1,1697$

Beispiel 2:

Bei einer exponentiell fortschreitenden Krankheit kommt es zu einer Verdoppelung eines Anfangswertes innerhalb von **a.** 4 Tagen, **b.** 10 Tagen.

- (i) Ermitteln Sie den jeweiligen prozentuellen Anstieg und geben Sie ausgehend von 800 Infizierten eine entsprechende Funktionsgleichung an.
- (ii) Bestimmen Sie die Anzahl der Infizierten nach 5 Tagen für beide Modelle.
- (iii) Nach wie vielen Tagen kommt es in den jeweiligen Modellen zu 25 000 Infizierten?
- (iv) Skizzieren Sie mit den errechneten Daten die beiden Funktionsgraphen in $[0; 20]$.

LÖSUNG: (i) **a.** 18,92% $n(t) = 800 \cdot 1,1892^t$ **b.** 7,18% $n(t) = 800 \cdot 1,0718^t$
(ii) **a.** 1903 **b.** 1132 **(iii) a.** ca. 20 Tage **b.** ca. 50 Tage

Beispiel 3:

Ein Forschungslabor errechnete den prozentuellen Anstieg von Infektionsfällen und kam dabei auf einen Wert von 16,8% pro Tag.

- a.** Geben Sie den Änderungsfaktor und eine Funktionsgleichung für $N(0) = 200$ an.
- b.** Nach 16 Tagen gibt es wie viele Infizierte mehr als es nach 10 Tagen Infizierte gab?
- c.** Nach wie vielen Tagen sind (i) 800 Menschen, (ii) 20 000 infiziert?
(Unter der Voraussetzung eines ungehemmten Wachstums!)
- d.** Bestimmen Sie die Verdoppelungszeit!

LÖSUNG: **a.** $N(t) = 200 \cdot 1,168^t$ **b.** $2399 - 945 = 1454$ **c (i)** $t = 8,93$ **(ii)** $t = 29,65$ **d.** $t = 4,46$ Tage

Beispiel 4:

Petrischalen dienen als Nährboden zum Anlegen von Bakterienkulturen. Eine Petrischale misst 200 cm² an Fläche. Die Ausbreitung der Bakterien verläuft annähernd exponentiell. Beobachtungen zufolge breitet sich der Bakterienstamm stündlich um 60% aus. Zu Beginn waren 5 cm² der Petrischale mit Bakterien bedeckt.

- a.** Erstellen Sie eine Funktionsgleichung, mit der der Prozess modellierbar ist.
- b.** Wie viele cm² sind nach 30 Minuten bzw. nach 6 Stunden von Bakterien bedeckt?
- c.** Nach wie vielen Stunden ist die Petrischale voll?
- d.** Wie lange dauert es, bis sich die Fläche, die mit Bakterien bedeckt ist, verdoppelt?
- e.** Wie lange dauert es, bis eine Fläche mit Bakterien bedeckt ist, die 80% der ursprünglichen Fläche in der Petrischale ausmacht?

LÖSUNG: **a.** $N(t) = 5 \cdot 1,6^t$ **b.** 6,32 cm² 83,89 cm² **c.** 7,85 h **d.** 1h28min29 sec **e.** 1h15min 2sec

Beispiel 5:

In einer Petrischale werden Pilzkulturen angelegt. Nach genauen Beobachtungen und entsprechenden Aufzeichnungen stellte man fest, dass sich die Anzahl der Pilzsporen alle 5,2 Stunden verdoppelt.

- a.** Um wie viel Prozent steigt die Anzahl der Pilzsporen pro Stunde?
- b.** Geben Sie eine Funktionsgleichung für den gegebenen Prozess an, wenn zu Beginn der Untersuchung 50 Pilzsporen in der Petrischale sind.
- c.** Veränderte Bedingungen beeinflussen das Wachstum. Innerhalb von 5 Stunden wurden die stündlichen Wachstumsraten aufgezeichnet: 14,6% 14,8% 16,8% 15,1% 12,6%
Ermitteln Sie die durchschnittliche stündliche Wachstumsrate in diesen 5 Stunden.

LÖSUNG: **a.** um 14,26% pro Stunde **b.** $N(t) = 50 \cdot 1,1426^t$ **c.** $x = 1,1477$